EJERCITACION

DIFERENCIACION E INTEGRACION NUMERICA

A) CALCULO NUMERICO DE DERIVADAS

Ejercicio n° 1:

Dda la siguiente tabla de datos:

i	0	1	2
x_i	0,349	0,436	0,523
$y_i=f(x_i)$	0,34202	0,42262	0,5

a) Estime la primer derivada de la función f(x) en x=0,436 utilizando las diferencias progresivas, regresivas y centrales.

b) Estime la segunda derivada en x=0,436

Ejercicio n° 2:

Aproxime f'(150) y f''(180) para la función f(x) dada en la tabla

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	60	120	180	240	300
$f(x_i)$	0	0,0824	0,2747	0,6502	1,3851	3,2229

Ejercicio n° 3:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	18	15	12	10	10

Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en x=6 utilizando alguna fórmula conveniente.

Ejercicio n° 4:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones, justificando sus respuestas:

a) No es posible calcular una aproximación de $f'(x_i)$ si no se conoce el valor de $f(x_i)$

b) Si se dispone de una tabla con valores $f_0, f_1, \ldots, f_n$ $(n \geq 4)$, entonces se puede calcular aproximadamente la derivada segunda de f_2 usando diferencias progresivas.

B) CALCULO NUMERICO DE INTEGRALES

☑ Ejercicio n° 5:

Explique en qué casos se debe recurrir a la integración numérica y en qué consiste el método de los trapecios.

☑ Ejercicio n° 6:

Dada la función $f(x) = 1+x^3$ en $[0,2]$ calcule la integral:

a) en forma analítica
b) aproximando mediante Trapecios con h=1, h=0.5, h=0.2
c) aproximando mediante Simpson con h=1
d) calcule los errores y extraiga conclusiones

☑ Ejercicio n° 7:

Estime $\int_{1}^{1.4} f(x)dx$ de la función f dada por la tabla:

i	0	1	2	3	4
x_i	1.0	1.1	1.2	1.3	1.4
y_i	0.010	0.252	0.586	1.024	1.578

a) Por el método de Trapecios b) Por el método de Simpson

☑ Ejercicio n° 8:

Halle $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{\frac{-x^2}{2}}dx$

a) por el método de los Trapecios con h=0.5
b) por el método de los Simpson con h=0.5
c) estime los errores absolutos y relativos.

☑ Ejercicio n° 9:

Halle el volumen del siguiente cuerpo (en revolución) $V = \int_a^b f(x)^2 dx$ siendo $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

a) Usando Trapecios con h=1 b) Usando Simpson con h=1

☑ Ejercicio n° 10:

Calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$ y compruebe que su valor es 10π.

☑ Ejercicio n° 11:

Aplique la regla de Simpson para encontrar el área dentro del primer cuadrante de la curva:

$f(x)=(x+5)(x-1)(9-x)$

☑ Ejercicio n° 12:

Para ciertos trabajos sobre recursos hidráulicos se requieren canales con un cierto área transversal. A falta de otros medios para el cálculo de tales áreas, se toman medidas de la profundidad a lo largo de la sección transversal. La tabla que sigue muestra la longitud transversal y su correspondiente profundidad. Utilizando las reglas del trapecio y Simpson, calcule dicha área transversal, sabiendo que las medidas están expresadas en metros.

longitud	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
profundidad	0,0	1,8	2,0	4,0	4,0	6,0	4,0	3,4	3,6	2,8	0,0

☑ Ejercicio n° 13:

Dada la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
y=f(x)	21	38	62	104	175

Halle un valor aproximado de $\int_1^5 f(x)dx$ usando si es posible el método de Simpson, sino el de Trapecios e indique si se puede estimar el error cometido en este caso.

☑ Ejercicio n° 14:

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones y justifique:

a) Sea f(x) una función positiva y cóncava hacia abajo en [a,b] , sea A el valor de la integral calculada por el método de los trapecios $\Rightarrow$ $A < \int_a^b f(x)dx$

b) Si al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ por trapecios se obtiene el valor exacto $\Rightarrow$ $f''(x) = 0$ en todo $x \in (a,b)$

c) Si al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ por Simpson se obtiene error cero $\Rightarrow$ f(x) es polinómica de grado ≤ 3.

d) El error en la integración por Simpson de $f(x) = ax^3 + bx^2 + 10$ en (0; p) depende exclusivamente del valor de p.

e) $\forall$ a $\in$ Z : es posible resolver la integral de unan función f(x) en el intervalo (a; 16a) por el método de Simpson con h = 0.15

f) La integral de la función $f(x) = e^{|x|} \bullet \text{sen}(x)$ entre -a y a (con $a \in |R^+$) calculada por el método de Trapecios con una cantidad par de subintervalos da siempre exacta.

g) Existe $h \in |R$ tal que $\int_{-1}^{1} \frac{\text{sen}(\pi x)}{\pi x} dx$ calculada por Trapecios dé mayor que la exacta.

h) No es posible calcular $\int_{0}^{2} x^2 e^x \, dx$ por el método de Simpson con h=0.4

Ejercicio n° 15:

a) Determine el número de subintervalos que deben tomarse para aproximar $\int_{1}^{2} \frac{1}{x} dx$ con dos cifras decimales correctas aplicando el método del trapecio.

b) Determine el número de subintervalos que deben tomarse para aproximar $\int_{0,1}^{1} \frac{1}{x} dx$ con dos cifras decimales correctas aplicando el método del trapecio.

Ejercicio n° 16:

Halle el mayor valor de $h \in Q$ y no periódico tal que al calcular las siguientes integrales en los intervalos dados, el error sea menor al ε fijado.

a) $I = \int_{1}^{5} x^2 \ln(x) \, dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-5}$. me da h=0,125 (Verificado en la compu)

b) $I = \int_{1}^{5} x^2 \ln(x) \, dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

c) $I = \int_{-3}^{-1} (e^x + sen(x))dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-4}$.

d) $I = \int_{0}^{1} (x \,\text{sen}(x) + \cos(x)) \, dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

e) $I = \int_{0}^{5} (x+1)^5 \, dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-2}$.

f) $I = \int_{1}^{5} x^3 \ln(x) \, dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-5}$

g) $I = \int_{0}^{1} e^{2x} \cos(x) dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$

h) $I = \int_{1}^{3} \frac{\ln(x)+1}{x} dx$ por Trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$.

Ejercicio n° 17:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas justificando:

a) Al calcular por Trapecios la integral de $f(x) = \ln(x)\, x^3$ entre 1 y 2 el valor que se obtiene es mayor que el valor exacto de la integral.

b) Para la integral anterior, si se la resuelve por Trapecios con h=0.1 el error será menor que 0.0001

c) Al calcular por Trapecios $\int_1^4 e^{2x}\cos(x)dx$ con h=0.1 se obtiene un valor mayor al exacto.

d) Es posible calcular la integral anterior por Simpson con h = 0.04

Ejercicio n° 18:

Dé un ejemplo de una función NO LINEAL tal que:

a) Al calcular la integral de esa función por Trapecios se obtenga menor error que calculándola por Simpson.

b) El valor de la integral en [a,b] calculada por el método de Simpson dé un error de signo contrario al calculado por Trapecios.

Ejercicio n° 19:

Dada $I = \int_{-a}^{a} f(x)\, dx$, marque la/s proposición/ones verdadera/s:

a) Si f es impar $\wedge$ $h \mid a \Rightarrow$ Error(Trapecios)=0
b) Si a= 15, es posible resolverla por Simpson con h=0.6
c) Si Error(Simpson) = 0 $\Rightarrow$ f es polinómica de grado ≤ 3
d) ninguna de las anteriores es correcta

Ejercicio n° 20:

Dada $I = \int_0^2 f(x)\, dx$, siendo $f(x) = x^2$ si $x \in (0;1)$ $\wedge$ $f(x) = 2x - x^2$ si $x \in (1;2)$ marque la/s proposición/ones verdadera/s:

a) Trapecios nunca da exacto
b) $\exists$ h tal que Error(Simpson) > Error(Trapecios)
c) Simpson con h=1 da exacto
d) ninguna de las anteriores es correcta

Ejercicio n° 21:

La mínima cantidad de subintervalos para calcular el valor exacto de la integral $\int_1^2 3x^3 - 2x^2 + 5\, dx$ usando el método de Simpson es: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

Ejercicio n° 22:

Si f es una función positiva y creciente en el intervalo [a,b] entonces el valor de $\int_a^b f(x)dx$ por Simpson es:

a) siempre mayor al exacto
b) siempre menor al exacto
c) nunca puede dar exacto
d) Ninguna de las anteriores

Ejercicio n° 23:

El valor del área comprendida entre las funciones $y = x$, $y = \frac{3}{x-2}$ y el eje x entre 1 y 5 por Trapecios es:

a) menor al valor exacto
b) mayor al valor exacto
c) igual al valor exacto
d) ninguna de las anteriores

El área anterior calculada por el método de Simpson con h=1 es:........................ (completar)

Ejercicio n° 24:

¿Es posible resolver $I = \int_{-0.5}^{0.5} e^{-x^2}\,dx$ por el Método de Trapecios con h = 0.04 y <u>asegurar</u> que el valor aproximado obtenido es menor que el exacto?

Ejercicio n° 25:

Dada $I = \int_1^5 f(x)\,dx$ indique cuales de las siguientes afirmaciones son correctas:

a) Si f es polinómica de grado 5 entonces el método de trapecios no puede dar exacto.

b) No es posible tomar h=0.8 para hallar un valor aproximado por el método de Simpson.

c) Una cota del error de trapecios con h=1 es: $\frac{1}{3} f''(5)$

Ejercicio n° 26:

Indique si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas <u>justificando</u>:

a) La menor cantidad de subintervalos n para que al calcular $\int_1^5 x^3 \ln(x)\,dx$ por el método de Simpson pueda asegurarse un error $\varepsilon < 10^{-5}$ sin resolver la integral analíticamente, es n = 24.

b) Si se calcula $\int_{1.7}^{4.7} \frac{\ln(x)+1}{x}\,dx$ por Trapecios con h=0.125 el error es menor que 10^{-4}.

10) Tomando h= 0.1 y calculando $A = 2 * 0.4 \int_{-5}^{5} \sqrt{25 - x^2}\, dx$ por Simpson se obtiene: 31.4029

que es aproximadamente igual a $10\pi = 31.4159....$

11) $I = \int_{1}^{9} f(x)dx = 853.3333$ por Simpson con h=4 ya que al ser cúbica da exacto $\forall$ h.

12) Por Trapecios: 63.2 Por Simpson: 66.1333

13) Por Simpson (ya que n=4): A = 296 No se puede estimar el error pues no se conoce f(x)

14) a) VERDADERO.

b) FALSO.

c) FALSO.

d) FALSO.

e) VERDADERO.

f) VERDADERO.

g) FALSO.

h) VERDADERO.

15) a) Deben tomarse ... subintervalos.

b) Deben tomarse ... subintervalos.

16) a) h = 0.1 → a mi me dio h=0,125

b) h = 0.0625

c) h = 0.25

d) h = 0.25

e) h = 0.125

f) h = 0.000625

g) h = 0.0625

h) h = 0.2

17) a) VERDADERO ya que $f'(x) > 0 \wedge f''(x) > 0$ en [1,2]

b) FALSO.

c) FALSO

d) FALSO.

18) a) Por ejemplo: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & si \quad 0 < x < 1 \\ 3 - (x-1)^2 & si \quad 1 < x < 2 \end{cases}$ por Trapecios da exacta pero por Simpson no.

b) Por ejemplo: $f(x) = sen(\pi x)$ en [0,1] Trapecios: 0.5 ; Simpson: 0.66666 ; Exacta: 0.6366197

19) Son verdaderas la A y la B.

20) Sólo es verdadera la B.

21) La respuesta correcta es la b).

22) La respuesta correcta es la d).

23) La respuesta correcta es la b).

24) Es VERDADERO.

25) a) FALSO

b) VERDADERO.

c) FALSO.

26) a) FALSO. Para asegurar el error, deben tomarse 44 subintervalos.

b) FALSO.

c) FALSO. La función es cóncava hacia arriba.

d) FALSO. No hace falta tomar h tan pequeño, alcanza con que sea $h < 0.074$

27) Tomando $h = 0.05$ *NO se puede asegurar que el error sea menor que 0.0001*

28) Con Trapecios y $h=1$*:* $A = 35$

29) Por Trapecios con $h=0.2$*:* $A = 1.17229579$

30) a) VERDADERO. Ambos dan exacto.

b) VERDADERO. Pues f es cóncava hacia abajo.

C) COMBINADOS

31) a) $f''(5) \cong 13$

b) Por Simpson: $A = -180$

32) a) $f'(4) \cong -72$

b) Por Trapecios (ya que hay 5 subintervalos): $A = -448$

c) Al calcular el valor de $\int_1^5 x \ln(x)\, dx$ por trapecios el valor aproximado es menor que el verdadero.

d) Para calcular $\int_1^4 x \ln(x)\, dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-6}$ se debe tomar h = 0.005

Ejercicio n° 27:

Dada la función $f(x) = x^2 e^x$ Analice (sin resolver la integral) si tomando h=0.05 se puede asegurar que el error cometido al calcular la integral de f(x) en [-2.5 ; -0.5] por Trapecios es menor que 0.0001 Justifique detalladamente.

Ejercicio n° 28:

Halle el área determinada por la curva $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje x mediante Trapecios con h=1.

Ejercicio n° 29:

Halle el área bajo la curva $y = \dfrac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$ en [-1, 1] por Trapecios, con n=10.

Ejercicio n° 30:

Sea $I = \int_0^K \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right) + 2 \quad dx$, indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

a) Si k=4, al resolverla por Trapecios se obtiene lo mismo que por Simpson con cualquier n par.

b) Si k=2, el valor calculado por Trapecios con cualquier h es menor al exacto.

C) EJERCICIOS COMBINADOS

Ejercicio n° 31:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

a) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en x=5.

b) Obtenga el valor de la integral de f(x) en [-3,9] utilizando el método de Simpson.

Ejercicio n° 32:

Dada la siguiente tabla de datos:

x_i	-3	-1	1	3	5	7
$f(x_i)$	77	47	43	-31	-175	-293

a) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada primera en x=4.

b) Obtenga el valor de la integral de f(x) en [-3,7] utilizando algún método numérico adecuado.

RESPUESTAS T.P. DIFERENCIACION E INTRGRACION NUMERICA

A) CALCULO NUMERICO DE DERIVADAS

1) a) Con diferencia progresiva: $f'(0.436) \cong 0.889425$

Con diferencia regresiva: $f'(0.436) \cong 0.9264367$

Con diferencia central: $f'(0.436) \cong 0.907931$

b) Solamente se puede con la central: $f''(0.436) \cong -0.425419$

2) $f'(150) \cong 0.006258$ $f''(180) \cong 0.0000998$ *(diferencia central)*

3) $f''(6) = 0.25$ *(diferencia central)*

4) a) FALSO, ya que con la fórmula central no se necesita la función en el punto.

b) VERDADERO, ya que sólo se necesitan f_2, f_3 *y* f_4

B) CALCULO NUMERICO DE INTEGRALES

5) Teórico.

6) a) Exacta: $I = 6$

b) Trapecios con h=1: $A = 7$; *Trapecios con h=0.5:* $A = 6.25$; *Trapecios con h=0.2:* $A = 6.04$

c) Simpson con h=1: $A = 6$ *d) A menor h en Trapecios, menor error. Simpson dio exacta ya que la función era cúbica, la derivada cuarta en cualquier punto vale cero.*

7) a) Por Trapecios: $A = 0.2656$ *b) Por Simpson:* $A = 0.26213333$

8) a) Por Trapecios: $A = 1.68576 / \sqrt{2\pi}$ *b) Por Simpson:* $A = 1.71217 / \sqrt{2\pi}$

c) Error de Trapecios $\leq$ ..... *Error de Simpson* $\leq$ .....

9) a) $V \cong 9$ *b)* $V \cong 12$ *Valor exacto: 12*

Diferenciación e Integración numérica

A) CALCULO NUMÉRICO de DERIVADAS

① Dada la sig. tabla de datos:

i	0	1	2
x_i	0,349	0,436	0,523
$y_i = f(x_i)$	0,34202	0,42262	0,5

$\to h = 0{,}087$

a) Estime la primer derivada de la función $f(x)$ en $x = 0{,}436$ utilizando las diferencias progresivas, regresivas y centrales.

Progresiva: $f'(x_i) = \dfrac{f_{i+1} - f_i}{h}$

$$f'(0{,}436) = \frac{f(0{,}523) - f(0{,}436)}{0{,}087} = \frac{0{,}5 - 0{,}42262}{0{,}087} = \boxed{0{,}8894 = f'(0{,}436)}$$

Regresiva: $f'(x_i) = \dfrac{f_i - f_{i-1}}{h}$

$$f'(0{,}436) = \frac{f(0{,}436) - f(0{,}349)}{0{,}087} = \frac{0{,}42262 - 0{,}34202}{0{,}087} = \boxed{0{,}9264 = f'(0{,}346)}$$

Central: $f'(x_i) = \dfrac{f_{i+1} - f_{i-1}}{2h}$

$$f'(0{,}436) = \frac{f(0{,}523) - f(0{,}349)}{2 \times 0{,}087} = \frac{0{,}5 - 0{,}34202}{0{,}174} = \boxed{0{,}9079 = f'(0{,}346)}$$

b) Estime la segunda derivada en $x = 0{,}436$

Solo se puede con la central

Central: $f''(x_i) = \dfrac{f_{i+1} - 2f_i + f_{i-1}}{h^2}$

$$f''(0{,}436) = \frac{f(0{,}523) - 2 \cdot f(0{,}436) + f(0{,}349)}{(0{,}087)^2} =$$

$$= \frac{0{,}5 - 2 \times 0{,}42262 + 0{,}34202}{0{,}007569} = \frac{-0{,}00322}{0{,}007569}$$

$$\boxed{f''(0{,}436) = -0{,}42542}$$

Sylvina
2018

② Aproxime $f'(150)$ y $f''(180)$ para la función $f(x)$ dada en la tabla:

j	0	1	2	3	4	5
x_i	0	60	120	180	240	300
$f(x_i)$	0	0,0824	0,2747	0,6502	1,3851	3,2229

$h = 60$

Siempre que se pueda, conviene usar la "central"

$$f'(150) = \frac{f(180) - f(120)}{60} = \frac{0{,}6502 - 0{,}2747}{60} = \boxed{0{,}006258 \simeq f'(150)}$$

$$f''(180) = \frac{f(240) - 2f(180) + f(120)}{60^2} = \frac{1{,}3851 - 2 \times 0{,}6502 + 0{,}2747}{3600} =$$

$$= \frac{0{,}3594}{3600} = \boxed{0{,}0000998\overline{3} = f''(180)}$$

---

③ Dada la sig. tabla de datos:

x_i	-2	0	2	4	6	8	10
$f(x_i)$	20	20	18	15	12	10	10

$h = 2$

Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en $x=6$ utilizando alguna fórmula conveniente.

$$f''(6) = \frac{f(8) - 2f(6) + f(4)}{h^2} = \frac{10 - 2 \times 12 + 15}{2^2} = \boxed{\frac{1}{4} = f''(6)}$$

---

④ Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones, justificando las respuestas:

a) No es posible calcular una aproximación de $f'(x_i)$ si no se conoce el valor de $f(x_i)$

$\boxed{F}$ con "diferencia central" se puede: $f(x_i) = \frac{f_{i+1} - f_{i-1}}{h^2}$

b) Si se dispone de una tabla con valores $f_0, f_1, \ldots f_n$ $(n \geq 4)$, entonces se puede calcular aproximadamente la derivada segunda de f_2 usando diferencias progresivas.

$\boxed{V}$ $f''_2 = \frac{f_4 - 2f_3 + f_2}{h^2}$, y existen todas ellas pues $n \geq 4$

B) CÁLCULO NUMÉRICO DE INTEGRALES

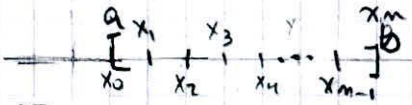
⑤ Explique en qué casos se debe recurrir a la integración numérica y en qué consiste el método de los trapecios.

Se recurre a la integración numérica cuando:

- no se conoce la expresión analítica sino que se dispone de una tabla de algunos datos
- se conoce f(x) pero no su primitiva (como $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}$
- cuando, conociendo a f(x) y a su primitiva, su cálculo es muy largo.

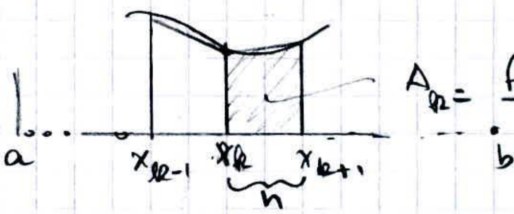
<u>Método de los trapecios</u>:

Se divide al intervalo $[a;b]$ en m subintervalos IGUALES.



El intervalo i-ésimo está entre x_{i-1} y x_i

En cada uno de los intervalos se traza un segmento desde $f(x_{i-1})$ hasta $f(x_i)$ y se halla su área. Luego se suman todas las áreas calculadas.



$$A_k = \frac{f(x_k) + f(x_{k+1})}{2} \cdot h$$

$$I = \frac{h}{2}\left[f(a) + f(b) + 2\left(f_1 + f_2 + \dots + f_{m-1}\right)\right]$$

Sylvina

⑥ Dada la función $f(x) = 1+x^3$ en $[0,2]$ calcule la integral:

a) en forma analítica

$$I = \int_0^2 1+x^3\,dx = x+\frac{x^4}{4}\Big|_0^2 = 2+\frac{16}{4}-0 = \boxed{6 = I}$$ ✓

b) aproximando mediante trapecios con $h=1$, $h=0,5$, $h=0,2$

$\boxed{h=1}$

x	y
0	1
1	2
2	9

$A_T = \frac{h}{2}\left(f(a)+f(b)+2f(x_i)\right)$

puntos medios

$A_T = \frac{1}{2}(1+9+4) = \boxed{7 = A}$ ✓

$\boxed{h=0,5}$

x	y
0	1
0,5	1,125
1	2
1,5	4,375
2	9

$I = \frac{0,5}{2}(1+9+1,125+2+4,375)$

$\boxed{A = 6,25}$ ✓

$\boxed{h=0,2}$

x	y
0	1
0,2	1,008
0,4	1,064
0,6	1,216
0,8	1,512
1	2

x	y
1,2	2,728
1,4	3,744
1,6	5,096
1,8	6,832
2	9

$A = \frac{0,2}{2}(1+9+2\times 25,2) = \boxed{6,04 = I}$ ✓

c) aproximando mediante Simpson con $h=1$

$h=1$

$A = \frac{h}{3}(E+4I+2P) = \frac{1}{3}(1+9+4\times 2) = \boxed{6 = A}$ ✓

d) Calcule los errores y extraiga conclusiones

El que tiene menor error es el método de Simpson, en el que $I = A$

Integración numérica

⑦ Estime $\int_1^{1,4} f(x)\,dx$ de la función f dada por la tabla:

i	0	1	2	3	4
x_i	1,0	1,1	1,2	1,3	1,4
y_i	0,010	0,252	0,586	1,024	1,578

$h = 0,1$

a) Por el método de trapecios

$$A_T = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_4 + 2(y_1 + y_2 + y_3)\right) = \frac{0,1}{2}\left(0,010 + 1,578 + 2(0,252 + 0,586 + 1,024)\right)$$

$$\boxed{A_T = 0,2656}$$ ✓

b) Por el método de Simpson

$$A_S \cong \frac{h}{3}(E + 4I + 2P)$$ E: extremos, I: impares, P: pares

$$A_S \cong \frac{0,1}{3}\left(0,010 + 1,578 + 4(0,252 + 1,024) + 2 \times 0,586\right) =$$

$$\boxed{A_S = 0,2621\overline{3}}$$ ✓

⑧ Halle: $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$

a) por el método de los trapecios con $h = 0,5$

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}} \rightarrow$

i	0	1	2	3	4
x_i	-1	-0,5	0	0,5	1
$f(x_i)$	0,6065	0,8824	1	0,8824	0,6065

$$A = \frac{h}{2}\left(f_0 + f_4 + 2(f_1 + f_2 + f_3)\right) = \frac{0,5}{2}\left(0,6065 + 0,6065 + 2(0,8824 + 1 + 0,8824)\right)$$

$$\boxed{A_T = 1,68565} \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot 1,68565 = 0,67247705$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0,67247705}$$

b) por el método de Simpson con $h = 0,5$

$$A = \frac{h}{3}\left(E + 4I + 2P\right) = \frac{0,5}{3}\left(0,6065 \times 2 + 4 \times 0,8824 \times 2 + 2 \times 1\right) = \boxed{1,7120\overline{3}} = A_S$$

$$\boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-1}^{1} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx = 0,6830024821}$$

$E_R = \frac{E_{ABS}}{\text{valor real}}$

c) estime los errores relativos y absolutos

$I = 0,6826894921$ → x TRAPECIOS: $E_{ABS} = 0,0102124421$ → $E_{REL} = 1,5\%$ ✓

↙ x SIMPSON : $E_{ABS} = 0,0031299$ → $E_{REL} = 0,046\%$ ✓

Sul

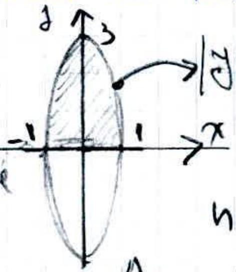
⑨ Halle el volumen del sig. cuerpo (en revolución) $V = \int_a^b f(x)^2\,dx$ siendo

$$x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$$

a) Usando trapecios con $h=1$

$$\underbrace{x^2}_{a=1} + \underbrace{\frac{y^2}{9}}_{b=3} = 1$$

Es un elipsoide



$$|y| = 3\sqrt{1-x^2} = f(x) \rightarrow \boxed{f(x)^2 = 9(1-x^2)} \quad x \in [-1,1]$$

$$\rightarrow V = \int_{-1}^{1} 9(1-x^2)\,dx$$

$h=1 \rightarrow f(-1)=0;\ f(0)=9;\ f(1)=0$

$$A_T = \frac{1}{2}(0+0+2\times 9) = \boxed{9 \cong A_T}$$

b) Usando Simpson con $h=1$

$$A_S = \frac{h}{3}(E_1 + E_2 + 4I + 2P)$$

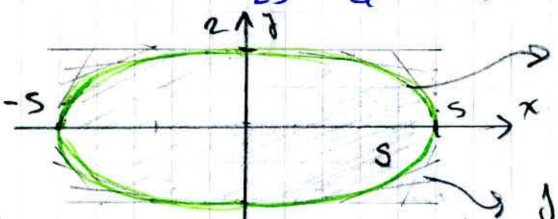
$$A_S = \frac{1}{3}(0+0+4\times 9) = \boxed{12 = A_S}$$

$$I = \int_{-1}^{1} 9(1-x^2)\,dx = 12$$

---

⑩ Calcule el área de la elipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ y compruebe que su valor es 10π

$$\underbrace{\frac{x^2}{25}}_{a=5} + \underbrace{\frac{y^2}{4}}_{b=2} = 1$$



$$y = 2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

$$y = -2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}$$

$$A_S = \int_{-5}^{5}\int_{-2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}}^{2\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}} 1\,dx\,dy = \int_{-5}^{5} 4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}}\,dx = 10\pi$$

$$f(x) = 4\sqrt{1-\frac{x^2}{25}} \rightarrow \left.\begin{array}{ll} f(-5) = 0 & i=0 \\ f(0) = 4 & i=1 \\ f(5) = 0 & i=2 \end{array}\right\} A_S = \frac{5}{3}(0+0+4\times 4) = 26{,}666$$

con $h=5$

Para que dé más preciso hay que usar un h mucho más pequeño

con $h = 0{,}1 \rightarrow A_S = 31{,}4029 \cong 10\pi$

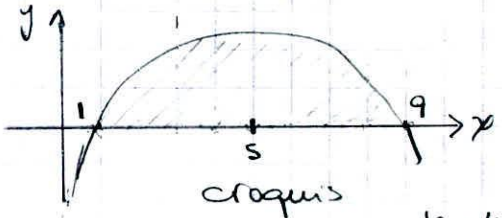
(11) Aplique la regla de Simpson para encontrar el área dentro del primer cuadrante de la curva $f(x) = (x+5)(x-1)(9-x)$

1º cuadr.: $x>0$, $y>0$

en $x=0 \rightarrow f(0) = -45$

$f(x)=0 \rightarrow x=-5$ (x es >0)

$x=1$
$x=9$ $\Big\} \; x \in [1,9]$



i	0	1	2
x_i	1	5	9
$f(x_i)$	0	160	0

$h=4$

$n=2$, $h=4$, $f(5)=160$

$f(1)=f(9)=0$

$$A_S = \frac{h}{3}(E+4I+2P) = \frac{4}{3}(0+4\times160) = \boxed{853{,}3\widehat{3} = A_S}$$

(12) Para ciertos trabajos sobre recursos hidráulicos se requieren canales con un cierto área transversal. A falta de otros medios para el cálculo de tales áreas, se toman medidas de la profundidad a lo largo de la sección transversal.
La tabla que sigue muestra la longitud transversal y su correspondiente profundidad. Utilizando las reglas del trapecio y Simpson, calcule dicha área transversal, sabiendo que las medidas están expresadas en metros:

lo agregué yo →

i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
longitud	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
profund.	0,0	1,8	2,0	4,0	4,0	6,0	4,0	3,4	3,6	2,8	0,0

$h=2$

$$A_{T\,\text{trap}} = \frac{h}{2}\left(y_0 + y_{10} + 2\left(\sum_{i=1}^{9} y_i\right)\right) = \frac{2}{2}\left(0+0+2(1{,}8+2+4\times3+6+3{,}4+3{,}6+2{,}8\right) =$$

$$\boxed{A_T = 63{,}2\,m^2}$$

SIMPSON
$$A_S = \frac{h}{3}(E+4I+2P) = \frac{2}{3}\left(0+4(1{,}8+4+6+3{,}4+2{,}8)+2(2+4+4+3{,}6)\right) =$$

$$\boxed{A_S = 66{,}1\widehat{3}\,m^2}$$

(13) Dada la siguiente tabla de datos:

x	1	2	3	4	5
$y=f(x)$	21	38	62	104	175
i	0		1		2

$h=2$

Halle un valor aproximado de $\int_1^5 f(x)\,dx$ usando, si es posible el método de Simpson si no, el de trapecios e indique si se puede estimar el error cometido en este caso

Hay número par de intervalos → se puede utilizar el método Simpson

$$A_S = \frac{2}{3}\left(21+175+4\times62\right) = \boxed{296 = \int_1^5 f(x)\,dx}$$

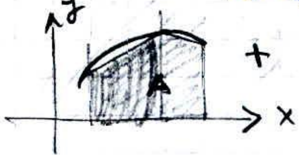
No se puede estimar el error pues no se conoce $f(x)$

S4

(14) Indique el valor de verdad de las sig. proposiciones y justifique:

a) Sea $f(x)$ una función positiva y cóncava hacia abajo en $[a,b]$ sea A el valor de la integral calculada por el método de los trapecios $\Rightarrow$ $A < \int_a^b f(x)\,dx$ $\boxed{V}$

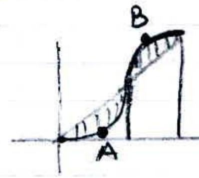
$\boxed{V}$



En cada trapecio quedará un error entre la curva y el segmento superior del trapecio

b) Si al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ por trapecios se obtiene el valor exacto entonces $f''(x)=0$ en todo $x \in (a,b)$

$\boxed{F}$ Un contraejemplo puede ser:



la suma de esos errores es cero sin embargo $f''_B \neq 0$

c) Si al calcular $\int_a^b f(x)\,dx$ por Simpson se obtiene error cero $\Rightarrow$ $f(x)$ es polinómica de grado ≤ 3

$\boxed{F}$ En una función senoidal, el error es cero sin embargo no es polinómica

d) El error en la integración por Simpson de $f(x) = ax^3+bx^2+10$ en $(0;p)$ depende exclusivamente del valor de p.

$\boxed{F}$ Cuando se utiliza el método de Simpson para integrar una función cúbica el error SIEMPRE DA CERO.

e) $\forall a \in \mathbb{Z}$: es posible resolver la integral de una función $f(x)$ en el intervalo $(a;16a)$ por el método Simpson con $h=0{,}15$

$\boxed{V}$ longitud del intervalo: $16a - a = |15a|$, mh = long intervalo

$m \cdot 0{,}15 = 15a \rightarrow m = \underbrace{100a}_{\text{siempre es par}}$ ✓

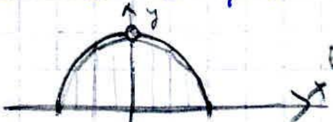
f) La integral de la función $f(x) = e^{|x|} \cdot \operatorname{sen}(x)$ entre $-a$ y a $(a \in \mathbb{R}^+)$ calculada por el método de trapecios con una cantidad par de subintervalos da siempre exacta.

$\boxed{V}$ $e^{|x|}$ es función par, $\operatorname{sen}(x)$ es " impar $\Big\} \rightarrow f(x) = e^{|x|} \cdot \operatorname{sen}(x)$ es impar (producto de f par e impar) y el intervalo es simétrico

$\rightarrow \Sigma$ errores $= 0$

g) $\exists\, h \in \mathbb{R}$ tal que $\int_{-1}^{1} \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$ calculada por trapecios de mayor que la exacta

$\boxed{F}$ Gráfico de la función



Es cóncava (siempre positiva) $\therefore \exists\, E > 0\ \forall h \in \mathbb{R}$

h) No es posible calcular $\int_0^2 x^2 e^x \, dx$ por el método de Simpson con $h=0,4$

$\boxed{V}$ Con $h=0,4 \rightarrow m h = b-a \rightarrow m\,0,4 = 2 \rightarrow m = 5$ impar ∴ No se puede x Simpson.

---

(15) a) Determine el número de subintervalo que deben tomarse para aproximar $\int_1^2 \frac{1}{x} \, dx$ con dos cifras decimales correctas aplicando el mét. trapecio:

$m.h = b-a \rightarrow m.h = 1 \rightarrow m = \frac{1}{h}$; $|E| < 10^{-2}$, $|E_T| = \left|\frac{a-b}{12} \cdot h^2 f''(\varphi)\right|$

$f(x) = \frac{1}{x}$ $\quad |E_T| = \frac{1}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-2} \rightarrow \boxed{h^2 |f''(\varphi)| < 0,12}$

$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ Como φ es genérico $\rightarrow$ tengo que acotar ese valor. Hallo los valores máximos posibles de $|f''(\varphi)| \rightarrow$ derivo la función, la

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ igualo a cero. Además tengo que tener en cuenta los extremos.

$f'''(x) = \frac{-6}{x^4} \neq 0 \; \forall x \in [1;2]$, como $f''(x)$ es decreciente en $[1;2]$ ∴ el máximo valor se obtiene en $x=1 \rightarrow f''(1) = 2$

$\rightarrow h^2 \, 2 < 0,12 \rightarrow h^2 < 0,06 \rightarrow h < 0,2449489743$ $\quad h = \frac{1}{n}$

$m = \frac{1}{h} = \frac{1}{0,2449489743} = 4,0824829 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m > 4$: con $m = 5 \rightarrow h = 0,2$ ✓

$I = 0,693147$, $A = 0,69560666$. $I - A = -0,\underbrace{00}_{2\text{ cifras}}25$ ✓ $\boxed{m = 5}$

b) Determine el número de subintervalos que deben tomarse para aproximar $F(x)$ con dos cifras decimales correctas aplicando el método del trapecio

$F(x) = \int_{0,1}^{1} \frac{1}{x} dx \rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \quad x \in [0,1; 1]$

$|a-b| = 0,1 - 1 = 0,9 \rightarrow m.h = 0,9 \quad |E_T| = \frac{0,9}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-2}$

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ es decreciente $\forall x \in \mathbb{R} \rightarrow$ en $[0.1; 1]$ es máx en $x = 0,1$

$f''(0.1) = \frac{2}{0,1^3} = 2000 \rightarrow h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-2} \cdot \frac{12}{0,9}$

$h^2 < 0,00006 \rightarrow h < 0,008165$

$m = \frac{1}{h} = 122,4745 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 123 \rightarrow h = 0,0081308....$

$m = 124 \rightarrow h = 0,00806....$

$m = 125 \rightarrow h = 0,008$

$\boxed{m = 125 \rightarrow h = 0,008}$

Sylvina

16) Halle el mayor valor de $h \in \mathbb{Q}$ y no periódico tal que al calcular las sig. integrales en los intervalos dados, el error sea menor al ε fijado

a) $I = \int_1^5 x^2 \ln(x)$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-5}$

$f(x) = x^2 \ln(x)$

$|E| = \frac{b-a}{180} h^4 |f^{IV}(\varphi)| < 10^{-5}$

$f'(x) = 2x \ln(x) + \frac{x^2}{x} = x(2\ln(x)+1)$

$h^4 |f^{IV}(\varphi)| < 10^{-5} \cdot 180$

$f''(x) = 2\ln(x)+1 + x\frac{2}{x} = 2\ln(x)+3$

$f'''(x) = \frac{2}{x}$

$f^{IV}(x) = -\frac{2}{x^2} \rightarrow$ es monótona creciente pero es siempre negativa en $[1;5]$

entonces $|f^{IV}(\varphi)|_{max}$ es en $x=1 \rightarrow |f^{IV}(\varphi)|_{max} = 2$

$h^4 \overset{2}{|f^{IV}(\varphi)|_{max}} < 0{,}0018 \rightarrow h^4 < 0{,}0009 \rightarrow h < 0{,}1732050808$

$m \cdot h = 4 \rightarrow$ si $h = 0{,}17320508 \longrightarrow m = 23{,}09 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 24 \rightarrow h = 0{,}16$

$m = 26 \rightarrow h = 0{,}038\ldots$

$\boxed{m = 32 \rightarrow h = 0{,}125}$

$I = 53{,}28213524$

$A = 53{,}2821331$

$I - A = 0{,}00000216 < 10^{-5}$ ✓

$\boxed{m = 32 \rightarrow h = 0{,}125}$

b) $I = \int_1^5 x^2 \ln(x)\,dx$ por trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$

$|E_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-2}$, $b-a = 4 \rightarrow h^2 |f''(\varphi)| < 0{,}03$

Acoto $|f''(\varphi)|$:

$f''(x) = 2\ln(x)+3 \rightarrow$ monótona creciente positiva $\rightarrow |f''(x)|_{max} = f''(5)$

$\rightarrow h^2 |f''(\varphi)|_{max} < 0{,}03 \rightarrow h^2 \, 6{,}218875825 < 0{,}03$

$h^2 < 0{,}000482402 \rightarrow h < 0{,}0694552$

$m h = 4 \rightarrow h = 0{,}0694552 \longrightarrow m = 57{,}59 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 58 \rightarrow h = 0{,}0689\ldots$

(busco $m = 4k$) $m = 60 \rightarrow h = 0{,}0\overline{6}$

$\boxed{m = 64 \rightarrow h = 0{,}0625}$

$\boxed{m = 64 \rightarrow h = 0{,}0625}$ ✓

c) $I=\int_{-3}^{-1}(e^x+\operatorname{sen}(x))\,dx$ por Simpson con $\varepsilon<10^{-4}$

$f(x)=e^x+\operatorname{sen}(x)$

$|\varepsilon_S|=\frac{b-a}{180}h^4|f^{IV}(\varphi)|<10^{-4}$

$f'(x)=e^x+\cos(x)$

$\frac{2}{180}h^4|f^{IV}(\varphi)|<10^{-4}$

$f''(x)=e^x-\operatorname{sen}(x)$

$h^4|f^{IV}(\varphi)|<0{,}009$

$f'''(x)=e^x-\cos(x)$

No conozco la forma de $f^{IV}(x)$ → busco máx y mín.

$f^{IV}(x)=e^x+\operatorname{sen}(x)$ → $f^{V}(\varphi)=e^x+\cos(x)=0$ → $e^x=-\cos(x)$

$F(x_n)=e^{x_n}+\cos(x_n)$

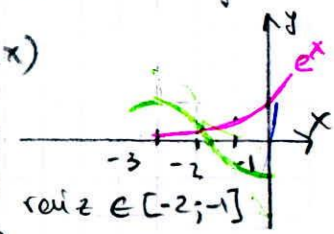
$F'(x_n)=e^{x_n}-\operatorname{sen}(x_n)$

$\begin{cases} x_{n+1}=x_n-\dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)} \\ x_0=-2 \end{cases}$ ← busco raíces x Newton Raphson

$x_1=-1{,}731186329$

$x_2=-1{,}746106803$

$\boxed{x_3=-1{,}74613953}$ en x_3, f^{IV} tiene tg. horizontal



raíz $\in[-2;-1]$

Hallo máximo valor de f^{IV}

$f^{IV}(-3)=-0{,}0913329$

$f^{IV}(-1)=-0{,}4735915$

$f^{IV}(x_3)=-0{,}8102206$

→ $\boxed{|f^{IV}(\varphi)|_{máx}=0{,}8102206}$

→ $h^4<\frac{0{,}009}{0{,}8102206}$ → $h^4<0{,}01110808536$ → $h<0{,}3246458138$

$m.h=2$ → $h=0{,}3246458138$ → $m=6{,}16$ $\xrightarrow{m\in\mathbb{N};\,m=2k}$ $\boxed{m=8 \rightarrow h=0{,}25}$ ✓

d) $I=\int_0^1(x\operatorname{sen}(x)+\cos x)\,dx$ por trapecios con $\varepsilon<10^{-2}$

$f(x)=x\operatorname{sen}(x)+\cos(x)$

$|\varepsilon_T|=\frac{b-a}{12}h^2|f''(\varphi)|<10^{-2}$

$f'(x)=\cancel{\operatorname{sen}(x)}+x\cos(x)-\cancel{\operatorname{sen}(x)}=x\cos(x)$

$\frac{1}{12}h^2|f''(\varphi)|<10^{-2}$

$f''(x)=\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)$

$h^2\underbrace{|f''(\varphi)|}_{\text{busco cuál es}}<0{,}12$

$f'''(x)=-\operatorname{sen}(x)-\operatorname{sen}(x)-x\cos(x)=-(2\operatorname{sen}(x)+x\cos(x))$

$|f''(\varphi)|_{max}$

$f'''(x)=0$ → $2\operatorname{sen}(x)=x\cos(x)$

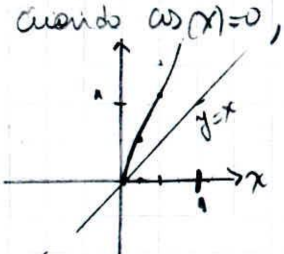
$x=0$ lo cumple

$\begin{cases} f''(0)=1 \\ f''(1)=-0{,}301 \end{cases}$ $|f''(\varphi)|_{max}=1$

si $x\neq0$

cuando $\cos(x)=0$, $\operatorname{sen}(x)\neq0$ → $\frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}=\frac{x}{2}=tg(x)$

$x=2tg(x)$



el único x que hace que $2\operatorname{sen}(x)=x\cos(x)$ es $x=0$

$h^2<0{,}12$ → $h<0{,}34641016$

$h<0{,}3464101615$ → $m>2{,}88675$

$m\in\mathbb{N}$

$m=3$ → $h=0{,}3\overline{3}$; $m=4$ → $h=0{,}25$

$\boxed{m=4 \rightarrow h=0{,}25}$ ✓

Sql

e) $I = \int_0^5 (x+1)^5 dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-2}$

$f(x) = (x+1)^5$

$f'(x) = 5(x+1)^4$

$f''(x) = 20(x+1)^3$

$f'''(x) = 60(x+1)^2$

$f^{IV}(x) = 120(x+1)$

$f^{V}(x) = 120 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$|\varepsilon_S| = \frac{\overbrace{b-a}^{5}}{180} h^4 |f^{IV}(\varphi)| < 10^{-2}$

$h^4 |f^{IV}(\varphi)| < 0{,}36$

Hallo $|f^{IV}(\varphi)|_{max}$.

solo los extremos del intervalo

$\left.\begin{array}{l} f^{IV}(0) = 120 \\ f^{IV}(5) = 720 \end{array}\right\} |f^{IV}(\varphi)|_{max} = 720$

$mh = 5$

$h^4 < \frac{0{,}36}{720} = 0{,}0005 \rightarrow h < 0{,}1495348781$

$\rightarrow m = 33{,}4370\ldots \xrightarrow{m \in \mathbb{N};\, m=2k} m = 34 \xrightarrow{h=\frac{5}{m}} h = 0{,}14705\ldots$

$m = 36 \longrightarrow h = 0{,}138$

$m = 40 \longrightarrow h = 0{,}125 \rightarrow \boxed{h = 0{,}125}$

f) $I = \int_1^5 x^3 \ln(x)\, dx$ por trapecios con $\varepsilon < 10^{-5}$

$f(x) = x^3 \ln(x)$

$f'(x) = 3x^2 \ln(x) + x^2 = x^2(3\ln(x) + 1)$

$f''(x) = 2x(3\ln(x) + 1) + x^2\left(\frac{3}{x}\right) = x(6\ln(x) + 5)$

$f'''(x) = 6\ln(x) + 5 + x\frac{6}{x} = 6\ln(x) + 11$

$f'''(x) = 0 \rightarrow 6\ln(x) = -11 \rightarrow x = e^{-11/6} \notin [1;5]$

$|\varepsilon_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-5}$

$h^2 |f''(\varphi)| < 0{,}00003$

Hallo $|f''(\varphi)|_{max}$

$\left\{\begin{array}{l} f''(1) = 5 \\ f''(5) = 73{,}2831 \end{array}\right.$

$|f''(\varphi)|_{max} = f''(5)$

$\rightarrow h^2 \overbrace{|f''(\varphi)|_{max}}^{f''(5)} < 0{,}00003 \rightarrow h^2 < 4{,}09371 \times 10^{-7} \rightarrow h < 0{,}0006398$

$mh = 4 \rightarrow m = 6251{,}75 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m = 6252 \rightarrow h = 0{,}00063 79\ldots$

$m = 6400 \rightarrow h = 0{,}000625$

$\boxed{h = 0{,}000625}$

cont 16)

g) $I = \int_0^1 e^{2x} \cos(x)\, dx$ por trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$

$f(x) = e^{2x}\cos(x)$

$f'(x) = 2e^{2x}\cos(x) - e^{2x}\operatorname{sen}(x)$

$f''(x) = 4e^{2x}\cos(x) - 2e^{2x}\operatorname{sen}(x) - \left[2e^{2x}\operatorname{sen}(x) + e^{2x}\cos(x)\right] = e^{2x}(3\cos(x) - 4\operatorname{sen}(x))$

$f'''(x) = 2e^{2x}(3\cos(x) - 4\operatorname{sen}(x)) + e^{2x}(-3\operatorname{sen}(x) - 4\cos(x)) = e^{2x}(2\cos(x) - 11\operatorname{sen}(x))$

$|\varepsilon_T| = \frac{b-a}{12} h^2 |f'''(\varphi)| < 10^{-2} \rightarrow \boxed{h^2 \underbrace{|f''(\varphi)|}_{} < 0{,}12}$

hallo cota máxima (busco máx y mín de $f''(x)$)

$f'''(x) = 0 \xrightarrow{e^{2x} \neq 0\ \forall x} 2\cos(x) = 11\operatorname{sen}(x) \longrightarrow \cos(x) \neq 0$ pues $2 \neq 0$

$\frac{2}{11} = \frac{\operatorname{sen}(x_0)}{\cos(x_0)} = tg(x_0) \rightarrow x_0 = 0{,}1798534998$

$\begin{cases} f''(0) = 3 \\ f''(1) = -12{,}8937331 \\ f''(x_0) = 3{,}20408307 \end{cases}$ $|f''(\varphi)|_{máx} = 12{,}8937331 \nearrow h^2 |f''(1)| < 0{,}12$

$h^2 < 9{,}3068 \rightarrow h < 0{,}0964$

$h < 0{,}09647200061 \rightarrow m > 10{,}3657 \rightarrow m \geq 11$

$m.h = 1$

$m = 11 \rightarrow h = 0{,}0909$; $m = 16 \rightarrow \boxed{h = 0{,}0625}$ ✓

h) $I = \int_1^3 \frac{\ln(x)+1}{x}\, dx$ por trapecios con $\varepsilon < 10^{-2}$

$b - a = 2$

$f(x) = \frac{\ln(x)+1}{x}$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{x}}\cancel{x} - (\ln(x)+1)}{x^2} = \frac{1 - \ln(x) - 1}{x^2} = \frac{-\ln(x)}{x^2}$

$f''(x) = -\left[\frac{x - \ln(x)\, 2x}{x^4}\right] = -\frac{\cancel{x}(1 - 2\ln(x))}{x^{\cancel{4}3}} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$

$f'''(x) = \frac{2x^2 - (2\ln(x) - 1)3x^2}{x^6} = \frac{5x^2 - 6x^2\ln(x)}{x^6} = \frac{\cancel{x^2}(5 - 6\ln(x))}{x^{\cancel{6}4}} = \frac{5 - 6\ln(x)}{x^4}$

$\varepsilon_T = \frac{2}{12} h^2 |f''(\varphi)| < 10^{-2} \rightarrow h^2 |f''(\varphi)| < 0{,}06$

• $f'''(x) = 0 \rightarrow 5 = 6\ln(x) \rightarrow x = e^{\frac{5}{6}} \in [1;3]$ ✓

$\begin{cases} f''(1) = -1 \swarrow máx \\ f''(3) = 0{,}04434 \\ f''(e^{5/6}) = 0{,}0547233242 \end{cases}$

$\rightarrow h^2 . \underbrace{|f''(\varphi)|_{máx}}_{1} < 0{,}06 \rightarrow h^2 < 0{,}06$

$\rightarrow h^2 < 0{,}06 \rightarrow h < 0{,}24494887 \xrightarrow{m h = 2} m > 8{,}16 \xrightarrow{m \in \mathbb{N}} m \geq 9$

$m = 10 \rightarrow h = 0{,}2$ ✓ $\boxed{h = 0{,}2}$ ✓

Syl

(17) Indique si las sig. proposiciones son V o F justificando:

a) Al calcular por trapecios la integral de $f(x) = \ln(x)\, x^3$ entre 1 y 2 el valor que se obtiene es mayor que el valor exacto de la integral

$\boxed{V}$

Entre 1 y 2 $f(x) > 0$. Analizo la concavidad (signo de la 2° derivada)

$f'(x) = x^2 + \ln(x)\, 3x \rightarrow f''(x) = 2x + 3 + \ln(x)\, 3 > 0 \ \forall x \in [1;2] \rightarrow$

es positiva con concavidad hacia arriba $\rightarrow A > I$

b) Para la integral anterior, si se la resuelve por trapecios con $h = 0,1$ el error será menor que 0,0001

$\boxed{F}$

$|\varepsilon_T| = \frac{b-a}{12} \cdot h^2 \, |f''(\varphi)| < 0,0001$

es monótona creciente $\rightarrow$ busco f'' en los bordes: $f(1) = 5$; $f(2) = 9,079441542$

$\varepsilon_T = \frac{1}{12}(0,01)^2 \cdot 9,079441542 = 0,007566 > 0,0001$

c) Al calcular por trapecios $\int_1^4 e^{2x} \cos(x)\, dx$ con $h = 0,1$ se obtiene un valor mayor al exacto

$\boxed{F}$

$\varepsilon_T = \frac{\overset{<0}{a-b}}{12} \overset{>0}{h^2} F''(\varphi)$

si $f''(\varphi) > 0 \rightarrow A > I$

si $f''(\varphi) < 0 \rightarrow I > A$

$A = \frac{0,1}{2}\left(e^2\cos(1) + e^8\cos(4) + 2\left(\sum_{i=11}^{39} e^{\frac{2x}{10}} \cos\left(\frac{x}{10}\right)\right)\right) = -1234,80528$

$I = -1233,433472 \longrightarrow I > A$

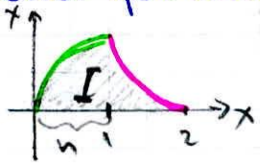
d) Es posible calcular la integral anterior por Simpson con $h = 0,04$

$m \cdot h = 3 \longrightarrow m = \frac{3}{h} = \frac{3}{0,04} = 75 \equiv 1(2)$ ∴ no se puede

$\boxed{F}$

(18) De un ejemplo de una función NO LINEAL tal que

a) Al calcular la integral de esa función por trapecios se obtenga menor error que calculándola por Simpson



• $-(x-1)^2 + 1 = y$

• $(x-2)^2 = y$

$f(x) = \begin{cases} -(x-1)^2 + 1 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ (x-2)^2 & \text{si } 1 < x \leq 2 \end{cases} \rightarrow I = \int_0^2 f(x)\,dx = 1$

$A_T = \frac{1}{2}(0 + 0 + 2.1) = 1 \rightarrow \boxed{E = 0}$ $\quad A_S = \frac{1}{3}(0 + 0 + 4 \times 1) = \frac{4}{3} \rightarrow E = \frac{1}{3}$

b) El valor de la integral en $[a;b]$ calculada por el método de Simpson dé un error de signo contrario al calculado por trapecios

$f(x) = \text{sen}(x) \quad x \in [0, \pi] \rightarrow I = \int_0^\pi \text{sen}(x)\,dx = 2 \qquad h = \frac{\pi}{2}$

$A_T = \frac{\pi/2}{2}(0 + 0 + 2.1) = \frac{\pi}{2} \rightarrow E_T = -0,429$

$A_S = \frac{\pi/2}{3}(0 + 0 + 4.1) = \frac{2}{3}\pi \rightarrow E_S = 0,0943$

(19) Dada $I = \int_{-a}^{a} f(x)\,dx$, marque la/s proposición/es verdadera/s:

(a) Si f es impar $\wedge$ $h | a \Rightarrow$ Error (trapecios) $= 0$

(b) Si $a = 15$, es posible resolverla por Simpson con $h = 0.6$

c) Si Error (Simpson) $= 0 \Rightarrow f$ es polinómica de grado ≤ 3

d) ninguna de las anteriores es correcta

a) $h | a \rightarrow a = k\,h \quad k \in \mathbb{Z} \quad , x \in [-a;a] \rightarrow m \cdot h = 2a = m \cdot \frac{a}{k} \Rightarrow \boxed{m = 2k}$

si f es impar y el intervalo es simétrico → la suma de errores es cero

b) $m \cdot h = 2a \Rightarrow m \cdot 0{,}6 = 30 \rightarrow m = 50$ (es par) ✓

c) $f(x) = \text{sen}(x)$, $x \in [0, 2\pi]$, $h = \pi$ $\quad \text{sen}(0) = \text{sen}(\pi) = \text{sen}(2\pi) =$

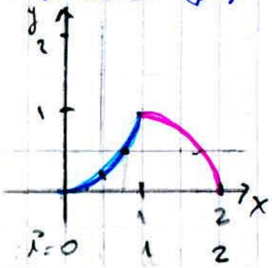
(20) Dada $I = \int_0^2 f(x)\,dx$, siendo $f(x) = x^2$ si $x \in (0;1) \wedge f(x) = 2x - x^2$ si $x \in (1;2)$ marque las proposiciones verdadera/s:

$f(x) = 2x - x^2 =$
$= 1 - (x-1)^2$

a) Trapecios nunca da exacto F

(b) $\exists\, h$ tal que Error (Simpson) > Error (trapecios)
con $h = 1$ se cumple

$E_t = 0$



c) Simpson con $h = 1$ da exacto

$E_S = \frac{4}{3}$ con $h = 1$

d) ninguno de los anteriores

(21) La mínima cantidad de subintervalos para calcular el valor exacto de la integral I usando el método de Simpson es:

$I = \int_1^2 3x^3 - 2x^2 + 5 \; dx$ $\quad$ ~~a) 1~~ $\quad$ (b) 2 $\quad$ ~~c) 3~~ $\quad$ d) 4

$m = 2 \rightarrow h = \frac{1}{2}$ $\qquad E_S = \frac{a-b}{180} h^4 f^{IV}(\xi)$ $\qquad E_S = 0 \;\forall\, m \therefore$ el mínimo es 2

$f'(x) = 9x^2 - 4x \rightarrow f''(x) = 18x \rightarrow f'''(x) = 18 \rightarrow f^{IV}(x) = 0$

(22) Si f es una función positiva y creciente en el intervalo $[a;b]$ entonces el valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ por Simpson es:

a) Siempre mayor al exacto
b) Siempre menor al exacto
c) nunca puede dar exacto
(d) ninguno de los anteriores

Si $f(x) = 4 - x^2$, $x \in [0, 2]$ $\qquad I = 5{,}\overline{3}$

$h = 1 \rightarrow m = 2$ $\quad f(0) = 4 \quad f(1) = 3 \quad f(2) = 0$ $\qquad A_S = \frac{1}{3}(4 + 4 \times 3) = 5{,}\overline{3}$ $\quad E = 0$

$i=0 \qquad i=1 \qquad i=2$

Syl

(23) El valor del área comprendida entre las funciones $y=x$, $y=\frac{3}{x-2}$ y el eje x entre 1 y 5 por trapecios es:

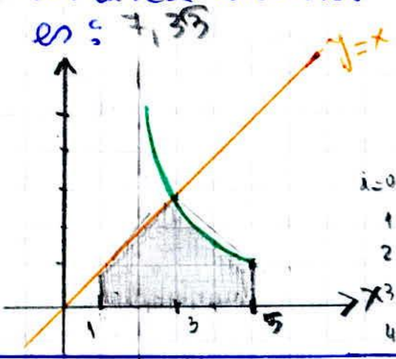
a) menor al valor exacto

b) mayor al valor exacto

c) igual al valor exacto

d) ninguna de las anteriores

El área anterior calculada por el método de Simpson con $h=1$ es: 7,33



de 1 a 3 es exacto pero de 3 a 5 es mayor

$i=0$ $f(1)=1$
1 $f(2)=2$
2 $f(3)=3$
3 $f(4)=3/2$
4 $f(5)=1$

$$A_S = \frac{1}{3}\left(1+1+4\left(2+3/2\right)+2\times 3\right) = \frac{22}{3}$$

---

(24) ¿Es posible resolver $I=\int_{-0,5}^{0,5} e^{-x^2}dx$ por el Método de trapecios con $h=0,04$ y asegurar que el valor aproximado obtenido es menor que el exacto?

$m.h = b-a \rightarrow m.0,04 = 1 \rightarrow m = 25$, $m \in \mathbb{N}$ ✓

$$\varepsilon_T = \frac{\overbrace{a-b}^{<0}}{12}\,\overbrace{h^2}^{>0}\,f''(\varphi)$$, si $f''(\varphi) > 0 \rightarrow \varepsilon_T < 0 \rightarrow A < I$

si $f''(\varphi) < 0 \rightarrow \varepsilon_T > 0 \rightarrow I > A$

$$f(x) = e^{-x^2} \rightarrow f'(x) = -2x\,e^{-x^2} \rightarrow f''(x) = -2e^{-x^2} + 4x^2 e^{-x^2} = \underbrace{2e^{-\frac{x^2}{2}}}_{>0}\underbrace{(2x^2-1)}_{<0\ \forall x\in[-0,5;0,5]}$$

$$f''(x) < 0\ \forall x \in (-0,5;0,5) \rightarrow A < I$$ $\rightarrow$ $\boxed{\text{Es posible}}$

---

(25) Dado $I=\int_1^5 f(x)dx$ indique cuales de las sig. afirmaciones son correctas

a) Si es polinómica de grado 5 entonces el método de trapecios no puede dar exacto

b) No es posible tomar $h=0.8$ para hallar un valor aproximado por el método de Simpson.

c) Una cota del error de trapecios con $h=1$ es: $\frac{1}{3}f''(5)$

a) Si $f(x) = (x-3)^5$ es impar en $x=3 \rightarrow \varepsilon_T = 0$

b) $m.h = b-a \rightarrow m.0,8 = 4 \rightarrow m = 5 \rightarrow$ Es impar $\rightarrow$ no se puede utilizar el m. Simpson

c)

Si f es, por ejemplo, negativa ($f(x) = -x^5 \dots$) $\rightarrow$ el valor mayor para acotar estará en $f''(1)$

26) Indique si las sig. proposiciones son V o F, justificando:

a) La menor cantidad de subintervalos m para que al calcular $\int_1^5 x^3 \ln(x)\,dx$ por el método de Simpson puede asegurarse un error $\varepsilon < 10^{-5}$ sin resolver la integral analíticamente es $m = 24$

Si $m = 24 \xrightarrow{mh=4} h = \frac{4}{24} = \frac{1}{6} = 0{,}166 \rightarrow$ no puedo asegurar $\varepsilon < 10^{-5}$

$\boxed{F}$

b) Si se calcula $\int_{1{,}7}^{4{,}7} \frac{\ln(x)+1}{x}\,dx$ por trapecios con $h = 0{,}125$ el error es menor que 10^{-4}

$f'(x) = \frac{-\ln(x)}{x^2}$

$f''(x) = \frac{2\ln(x)-1}{x^3}$

$f'''(x) = \frac{5-6\ln(x)}{x^4} = 0 \rightarrow x = e^{5/6}$

$f''(4{,}7) = 0{,}0201$

$f''(e^{5/6}) = 0{,}0547$

$f''(1{,}7) = 0{,}0124$

$\varepsilon_T = \frac{3}{12}\, 0{,}125^2 |f''(\varphi)| \overset{?}{<} 10^{-4}$

$\underbrace{\frac{1}{4}\, 0{,}125^2 \times 0{,}0547}_{2{,}1367 \times 10^{-4}} > 10^{-4}$

$\boxed{F}$

c) Al calcular el valor de $\int_1^5 x \ln(x)\,dx$ por trapecios el valor aproximado es menor que el verdadero

$\boxed{F}$

$\varepsilon_T = \overbrace{\frac{a-b}{12}}^{<0} \cdot \underbrace{h^2}_{>0} f''(\varphi)$

si $f''(\varphi) < 0 \rightarrow \varepsilon_T > 0 \rightarrow A > I$

si $f''(\varphi) > 0 \rightarrow \varepsilon_T < 0 \rightarrow I > A$

$f'(x) = \ln(x) + 1 \rightarrow f''(x) = \frac{1}{x} > 0 \ \forall x \in [1;5] \longrightarrow A > I$

d) Para calcular $\int_1^4 x \ln(x)\,dx$ por Simpson con $\varepsilon < 10^{-6}$ se debe tomar $h = 0{,}005$

$m \cdot h = 3 \rightarrow m = \frac{3}{0{,}005} = 600 \rightarrow$ par ✓

$|\varepsilon_S| = \left|\frac{a-b}{180} h^4 f^{IV}(\varphi)\right| = \frac{3}{180} \cdot h^4 |f^{IV}(\varphi)| = \frac{1}{60} h^4\, 2 \overset{?}{<} 10^{-6}$ (I)

acotar

$f'''(x) = -\frac{1}{x^2} \rightarrow f^{IV}(x) = \frac{2}{x^3} \rightarrow f^{V}(x) = \frac{-6}{x^4} \neq 0 \ \forall x \in [1;4] \rightarrow f^{IV}(1) = 2$ max

$f^{IV}(4) = 1/32$

(I) $h^4 < 0{,}000003 \rightarrow h < 0{,}07400828 \rightarrow m > 40{,}5$

$m \geq 41 \qquad m = 48 \rightarrow \boxed{h = 0{,}0625} \neq 0{,}005$

$\boxed{F}$

Selvina

(27) Dada la función $f(x) = x^2 e^x$ Analice (sin resolver la integral) si tomando $h = 0{,}05$ se puede asegurar que el error cometido al calcular la integral de $f(x)$ en $[-2{,}5; -0{,}5]$ por trapecios es menor que $0{,}0001$, Justifique detalladamente

$$f'(x) = 2x e^x + x^2 e^x = e^x (x^2 + 2x)$$

$$f''(x) = e^x (x^2+2x) + e^x (2x+2) = e^x (x^2+4x+2)$$

$$|\varepsilon_T| = \left|\frac{a-b}{12}\right| \cdot h^2 |f''(\varphi)| \rightarrow \varepsilon_T = \left|\frac{-2}{12}\right| \cdot 0{,}05^2 \underbrace{|f''(\varphi)|}_{\text{busco una cota máxima}}$$

$$f'''(x) = e^x (x^2+4x+2) + e^x (2x+4) = \underbrace{e^x}_{\neq 0} (x^2+6x+6) = 0$$

$x^2+6x+6=0$
$x = -1{,}267949192$
el otro $\notin [-2{,}5; -0{,}5]$

$f''(-2{,}5) = 0{,}5130312414$ • MAX
$f''(-0{,}5) = 0{,}1516326649$
$f''(-1{,}267949192) = 0{,}45241851$

$$\varepsilon_T = \frac{1}{6}\, 0{,}05^2 \times |f''(-2{,}5)| =$$
$$= 0{,}00021376 > 0{,}0001$$

$\boxed{\text{No se puede asegurar que el error es menor que } 0{,}0001}$

---

(28) Halle el área determinada por la curva $f(x) = -x^2 + 6x$ y el eje x mediante trapecios con $h = 1$

$$f(x) = -x^2 + 6x = 9 - (x-3)^2$$

$$f(x) = 0 = 9 - (x-3)^2 \rightarrow (x-3)^2 = 9 \rightarrow x = 0 \lor x = 6 \rightarrow x \in [0; 6]$$

$f(0) = 0$
$f(1) = 5$
$f(2) = 8$
$f(3) = 9$
$f(4) = 8$
$f(5) = 5$
$f(6) = 0$

$$\rightarrow A = \frac{1}{2}\left(0 + 0 + 2(5+8+9+8+5)\right) = \boxed{35 = A}$$ ✓

---

(29) Halle el área bajo la curva $y = \frac{\operatorname{sen}(\pi x)}{\pi x}$ en $[-1, 1]$ por trapecios con $n = 10$

i	x_i	y_i
0	-1	0
1	-0,8	0,2338
2	-0,6	0,5045
3	-0,4	0,7568
4	-0,2	0,9354
5	0	1
6	0,2	0,9354
7	0,4	0,7568
8	0,6	0,5045
9	0,8	0,2338
10	1	0

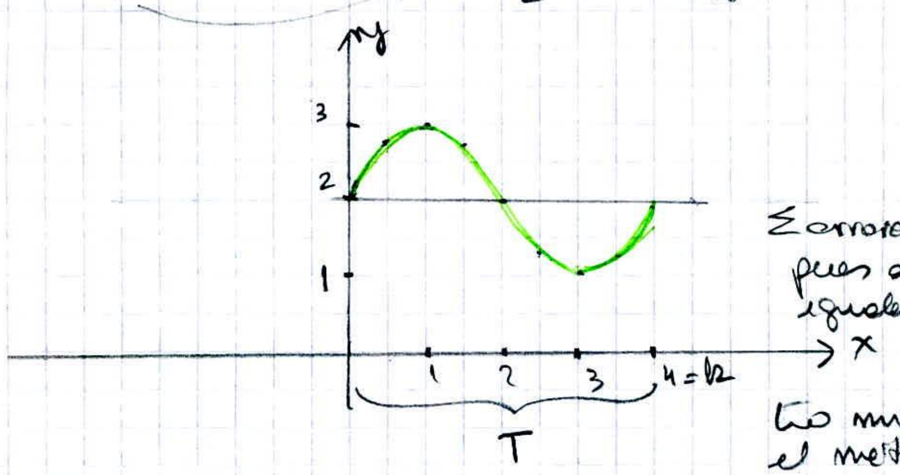
$$n \cdot h = b - a \rightarrow 10h = 2 \rightarrow h = 0{,}2$$

$$A = \frac{0{,}2}{2}\left[0 + 0 + 2\left(2 \times (0{,}2338 + 0{,}5045 + 0{,}7568 + 0{,}9354) + 1\right)\right] =$$
$$= 0{,}1\,(2 \times 5{,}861) = \boxed{1{,}1722 = A}$$ ✓

30) Sea $I = \int_0^k \underbrace{\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}x\right)+2}_{f(x)} dx$, indique el valor de verdad de las sig. proposiciones:

a) Si $k=4$, al resolverla por trapecios se obtiene lo mismo que por Simpson con cualquier m par

$f(x) = \text{sen}(\frac{\pi}{2}x)+2 \qquad \omega = \frac{\pi}{2} \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = \boxed{4=T}$

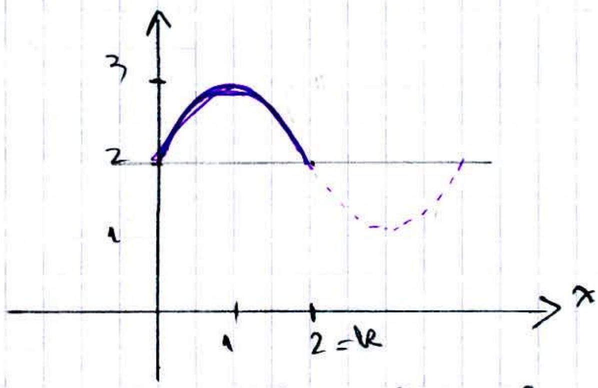


Σ errores por trapecio = 0 pues de 0 a 2 dan errores iguales que de 2 a 4 pero de signo contrario

Lo mismo ocurre con el metodo Simpson

$\boxed{V}$ se obtiene lo mismo (el error es cero en ambos casos)

b) Si $k=2$ el valor calculado por trapecio con cualquier n es menor al exacto



$\boxed{V}$

de 0 a 2 la grafica de f es una curva cóncava hacia abajo $\rightarrow$ por trapecios $\rightarrow A_T < I$

c) EJERCICIOS COMBINADOS

(31) Dada la sig tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5	6
x_i	-3	-1	1	3	5	7	9
$f(x_i)$	39	19	-21	-57	-65	-21	99

$h=2$

a) Halle numéricamente un valor aproximado de la derivada segunda en $x=5$

$$f''(5) = \frac{f(7)-2f(5)+f(3)}{h^2} = \frac{-21-2(-65)+(-57)}{4} = \boxed{13 \cong f''(5)}$$ ✓

b) Obtenga el valor de la integral de $f(x)$ en $[-3;9]$ utilizando el método de simpson

$$A = \frac{2}{3}\left(39+99+4(19-57-21)+2(-21-65)\right) = \boxed{-180 = A_s}$$ ✓

---

(32) Dada la sig. tabla de datos:

i	0	1	2	3	4	5
x_i	-3	-1	1	3	5	7
$f(x_i)$	77	47	43	-31	-175	-293

$h=2$

a) Halle numéricamente un valor aproximado para la derivada primera en $x=4$

$$f'(4) = \frac{f(5)-f(3)}{h} = \frac{-175-(-31)}{2} = \boxed{-72 = f'(4)}$$

b) Obtenga el valor de la integral de $f(x)$ en $[-3;7]$ utilizando algún método numérico adecuado.

$n=5 \rightarrow$ lo resuelvo por el método de trapecios.

$$A_T = \frac{h}{2}\left(y_0+y_5+2(y_1+y_2+y_3+y_4)\right) =$$
$$= \frac{2}{2}\left(77-293+2(47+43-31-175)\right) = \boxed{-448 = A_T}$$